

Bài 1.(2.00 điểm) (Không dùng máy tính cầm tay)

a. Cho biết $A = 5 + \sqrt{15}$ và $B = 5 - \sqrt{15}$. Hãy so sánh tổng $A + B$ và tích AB .

b. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

Bài 2.(2.50 điểm)

Cho Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = mx - 2$ (m là tham số, $m \neq 0$)

a. Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b. Khi $m = 3$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

c. Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ là hai giao điểm phân biệt của (P) và (d). Tìm các giá trị của m sao cho : $y_A + y_B = 2(x_A + x_B) - 1$.

Bài 3.(1.50 điểm)

Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 6(m) và bình phương độ dài đường chéo gấp 5 lần chu vi. Xác định chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

Bài 4.(4.00 điểm)

Cho đường tròn (O; R). Từ một điểm M nằm ngoài (O; R) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp điểm). Lấy điểm C bất kỳ trên cung nhỏ AB (C khác A và B). Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên AB, AM, BM.

a. Chứng minh AECD là một tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh : $\widehat{DE} = \widehat{BA}$.

c. Gọi I là giao điểm của AC và ED, K là giao điểm của CB và DF. Chứng minh: $IK \parallel AB$.

d. Xác định vị trí điểm C trên cung nhỏ AB để $(AC^2 + CB^2)$ nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó khi $OM = 2R$.

----- HẾT -----

Đề thi này có 01 trang;

Giám thị không giải thích gì thêm.

SBD :/ Phòng :

Giám thị 1 :

Giám thị 2 :

Bài 1.(2.00 điểm)

a. Rút gọn biểu thức : $A = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$.

b. Tìm hai số a và b sao cho : $5a^2 + 5b^2 - 8ab + 2a + 2b + 2 = 0$.

Bài 2.(2.00 điểm)

a. Cho phương trình : $x^2 + (2m-1)x + m^2 = 0$ (m là tham số). Tìm số nguyên m lớn nhất để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $\frac{(x_1 - x_2)^2 + 7}{x_1 + x_2 + 1}$ là một số nguyên.

b. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3 \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15 \end{cases}$$

Bài 3.(2.00 điểm)

a. Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn điều kiện : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng : $abc + 2(1+a+b+c+ab+bc+ca) \geq 0$.

b. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên : $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_8^4 = 2009$.

Bài 4.(3.00 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là điểm đối xứng của H qua BC.

a. Chứng minh tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn (gọi đường tròn đó là (O)).

b. Gọi Q là trung điểm của AB. Chứng minh EQ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔEHC .

c. Biết BE cắt (O) tại điểm thứ hai là N và CF cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Tính giá trị biểu

thức : $T = \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}$.

Bài 5.(1.00 điểm)

Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC và một điểm M sao cho $AM = 1, BM = CM = \sqrt{21}$.

Chứng minh rằng : $S_{ABC} \leq 8\sqrt{3}$.

----- HẾT -----

Đề thi này có 01 trang;

Giám thị không giải thích gì thêm.

SBD :/ Phòng :

Giám thị 1 :

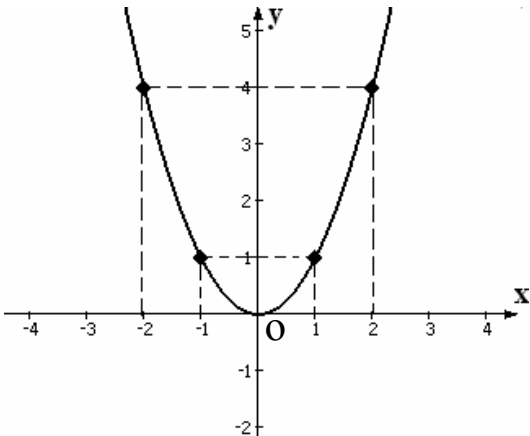
Giám thị 2 :

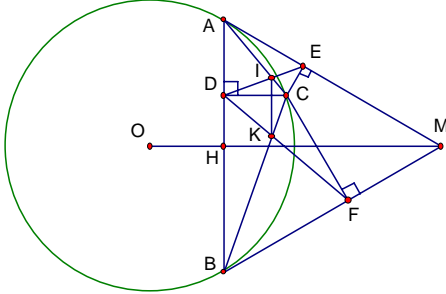
(ĐÁP ÁN CỦA ĐỀ CHÍNH THỨC)

A. Hướng dẫn chung:

1. Hướng dẫn chấm gồm có 02 trang;
2. Mọi cách giải đúng đều cho điểm tối đa phần tương ứng;
3. Bài 4 không vẽ hình không chấm;
4. Điểm toàn bài không làm tròn.

B. Đáp án và thang điểm:

Bài	Đáp án	Điểm																
1a	A = $5 + \sqrt{15}$ và B = $5 - \sqrt{15}$. Hãy so sánh tổng A + B và tích AB.	1 điểm																
	$A + B = 5 + \sqrt{15} + 5 - \sqrt{15} = 10$	0.25																
	$AB = (5 + \sqrt{15})(5 - \sqrt{15}) = 5^2 - (\sqrt{15})^2$ $= 25 - 15 = 10$	0.25																
	Vậy $A + B = AB$.	0.25																
1b	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$	1 điểm																
	$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 3x - 2(1 - 2x) = 12 \end{cases}$	0.25																
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x = 2 \end{cases}$	0.25																
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$	0.25																
	Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; -3)$.	0.25																
2a	Vẽ đồ thị (P) : $y = x^2$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.	1 điểm																
	Bảng giá trị <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>...</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>$y = x^2$</td> <td>...</td> <td>4</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>...</td> </tr> </table>	x	...	-2	-1	0	1	2	...	$y = x^2$...	4	1	0	1	4	...	0.50
	x	...	-2	-1	0	1	2	...										
$y = x^2$...	4	1	0	1	4	...											
Đồ thị 	0.50																	
2b	Khi m = 3, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).	1 điểm																
	Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$	0.25																
	Suy ra $x = 1$ hay $x = 2$	0.25																
	Thế $x = 1 \Rightarrow y = 1$, $x = 2 \Rightarrow y = 4$	0.25																
	Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là (1;1) và (2;4).	0.25																

	Tìm các giá trị của m sao cho $y_A + y_B = 2(x_A + x_B) - 1$.	0.5điểm
2c	Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $x^2 = mx - 2 \Leftrightarrow x^2 - mx + 2 = 0(*)$ (d) cắt (P) tại 2 điểm A và B khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 8 \Leftrightarrow m > \sqrt{8} \vee m < -\sqrt{8}$	0.25
	Áp dụng hệ thức Viet vào phương trình (*), ta có $x_A + x_B = m$ Vì A, B \in (d). Nên $y_A = mx_A - 2$; $y_B = mx_B - 2$, do đó $y_A + y_B = 2(x_A + x_B) - 1 \Leftrightarrow (m - 2)(x_A + x_B) - 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$ $\Leftrightarrow m = 3$ (thỏa) $\vee m = -1$ (loại). Vậy $m = 3$.	0.25
	Xác định chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.	1.5điểm
3	Gọi x (m) là chiều dài của mảnh đất ($x > 6$)	0.25
	Chiều rộng của mảnh đất là : $x - 6$. Chu vi mảnh đất là : $4x - 12$	0.25
	Bình phương độ dài đường chéo là : $x^2 + (x - 6)^2$	0.25
	Bình phương độ dài đường chéo gấp 5 chu vi nên : $x^2 + (x - 6)^2 = 5(4x - 12)$	0.25
	Giải phương trình bậc hai được $x = 12$ (thỏa mãn), $x = 4 < 6$ (loại)	0.25
	Vậy chiều dài của mảnh đất bằng 12 (m). Chiều rộng mảnh đất bằng $12 - 6 = 6$ (m).	0.25
	Chứng minh AECD là một tứ giác nội tiếp.	1điểm
4a		Không cho điểm hình vẽ bài 4
	$\sphericalangle AEC = 90^\circ$ (giả thiết)	0.25
	$\sphericalangle ADC = 90^\circ$ (giả thiết)	0.25
	$\sphericalangle AEC + \sphericalangle ADC = 180^\circ$	0.25
	\Rightarrow tứ giác AECD nội tiếp.	0.25
	Chứng minh $\sphericalangle EDE = \sphericalangle EBA$.	1điểm
4b	$\sphericalangle EDE = \sphericalangle EAE$ (nội tiếp cùng chắn \overline{EC})	0.25
	$\sphericalangle EBA = \sphericalangle EAE$ (nội tiếp và góc tiếp tuyến dây cung cùng chắn \overline{AC})	0.50
	$\Rightarrow \sphericalangle EDE = \sphericalangle EBA$.	0.25
	Chứng minh $IK \parallel AB$.	1điểm
4c	$\sphericalangle FCB + \sphericalangle FDB = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác FCDB nội tiếp $\Rightarrow \sphericalangle CDF = \sphericalangle CBF$ (nội tiếp cùng chắn \overline{CF})	0.25
	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBF$ (nội tiếp và góc tiếp tuyến dây cung cùng chắn \overline{CB}) $\Rightarrow \sphericalangle CDF = \sphericalangle CAB$	0.25
	$\sphericalangle ICK + \sphericalangle HDK = \sphericalangle ICK + \sphericalangle HDC + \sphericalangle CDK = \sphericalangle ACB + \sphericalangle EBA + \sphericalangle CAB = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác CIDK nội tiếp	0.25
	$\sphericalangle ICK = \sphericalangle CDK$ (nội tiếp cùng chắn \overline{CK}) $\Rightarrow \sphericalangle ICK = \sphericalangle CAB$ (đồng vị) $\Rightarrow IK \parallel AB$.	0.25
	Tìm vị trí điểm C để $AC^2 + CB^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất khi $OM = 2R$.	1điểm
4d	Đặt $\{H\} = AB \cap OM$. Không mất tổng quát, giả sử $AC \leq BC \Rightarrow D$ thuộc đoạn AH ($D \neq A$) $AC^2 = AD^2 + CD^2 = (AH - DH)^2 + CD^2 = AH^2 + DH^2 - 2AH \cdot DH + CD^2$	0.25
	$CB^2 = BD^2 + CD^2 = (BH + DH)^2 + CD^2 = BH^2 + DH^2 + 2BH \cdot DH + CD^2$	0.25
	Suy ra $AC^2 + CB^2 = 2AH^2 + 2HC^2$	0.25
	AH không đổi nên $AC^2 + CB^2$ nhỏ nhất khi HC nhỏ nhất $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa \overline{AB}	0.25
	Khi đó, với $OM = 2R$ ta có $CA = CB = R$. Vậy $AC^2 + CB^2 = 2R^2$.	0.25

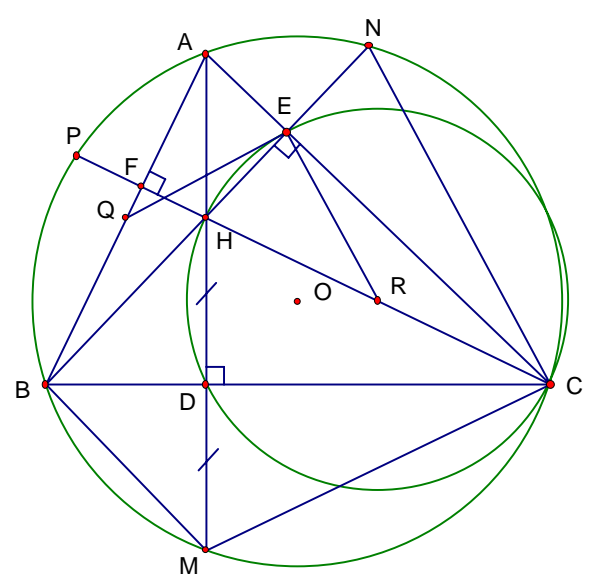
(ĐÁP ÁN CỦA ĐỀ CHÍNH THỨC)

A. Hướng dẫn chung:

1. Hướng dẫn chấm gồm có 03 trang;
2. Mọi cách giải đúng đều cho điểm tối đa phần tương ứng;
3. Bài 4 không vẽ hình không chấm;
4. Điểm toàn bài không làm tròn.

B. Đáp án và thang điểm:

Bài	Đáp án	Điểm
1a	Rút gọn A.	1 điểm
	$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2$	0.25
	$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2$	0.25
	$A = \frac{\sqrt{3}-1}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3+\sqrt{3}} + \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-\sqrt{3}}$	0.25
	$A = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.	0.25
1b	Tìm hai số a và b sao cho : $5a^2 + 5b^2 - 8ab + 2a + 2b + 2 = 0$.	1 điểm
	Ta có $5a^2 + 5b^2 - 8ab + 2a + 2b + 2 = 0 \Leftrightarrow (a^2 + 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) + (4a^2 - 8ab + 4b^2) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 + 4(a-b)^2 = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 = 0 \\ (b+1)^2 = 0 \\ (a-b)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+1=0 \\ a=b \end{cases}$	0.25
	Vậy $a = b = -1$.	0.25
2a	Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho $\frac{(x_1 - x_2)^2 + 7}{x_1 + x_2 + 1}$ là một số nguyên.	1 điểm
	$\Delta = (2m-1)^2 - 4m^2 = -4m+1$	0.25
	Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi $\Delta = -4m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$ (*)	
	Theo định lý Viet, ta có : $x_1 + x_2 = 1 - 2m, x_1 x_2 = m^2$	0.25
$\frac{(x_1 - x_2)^2 + 7}{x_1 + x_2 + 1} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + 7}{x_1 + x_2 + 1} = \frac{(1-2m)^2 - 4m^2 + 7}{1-2m+1} = \frac{8-4m}{2-2m} = 2 + \frac{2}{1-m}$		
	$\frac{(x_1 - x_2)^2 + 7}{x_1 + x_2 + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{1-m} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m \in \{-1; 0; 2; 3\}$	0.25
	Đổi chiếu điều kiện (*), ta được $m = 0$.	0.25

	Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3 \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15 \end{cases}$	1 điểm
2b	$\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3 \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y)^2 = 3 \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)[(x+y)^2 - 4xy] = 3 \\ (x+y)[(x+y)^2 - 2xy] = 15 \end{cases}$	0.25
	Đặt $S = x + y, P = x.y$, hệ trở thành $\begin{cases} S(S^2 - 4P) = 3 \\ S(S^2 - 2P) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 6 \\ S^3 - 2SP = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$	0.25
	Do đó x, y là nghiệm của phương trình bậc hai $t^2 - 3t + 2 = 0$	0.25
	Hệ có hai nghiệm là $(2;1), (1;2)$.	0.25
	Chứng minh $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.	1 điểm
3a	$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a , b , c \leq 1$. Do đó	0.25
	$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ac + abc \geq 0$ (1)	0.25
	Mặt khác $(1+a+b+c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2bc + 2ac \geq 0$ $\Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ac \geq 0$ (2) (vì $a^2 + b^2 + c^2 = 1$)	0.25
	Cộng (1) và (2) theo vế được bất đẳng thức cần chứng minh.	0.25
	Chứng minh phương trình $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_8^4 = 2009$ không có nghiệm nguyên.	1 điểm
3b	Nếu tất cả x_i chẵn thì x_i^4 chẵn nên $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_8^4$ chẵn, không thể bằng 2009	0.25
	Nếu có x_k lẻ: $x_k = 2m_k + 1, m_k \in \mathbb{Z}, x_k^4 = (2m_k + 1)^4 = 16m_k^3(m_k + 2) + 8m_k(3m_k + 1) + 1$ Nếu m_k chẵn thì $8m_k(3m_k + 1):16$ m_k lẻ thì $3m_k + 1$ chẵn $\Rightarrow 8m_k(3m_k + 1):16$	0.25
	Do đó, x_k^4 chia cho 16 có số dư bằng 1	
	Vì vậy, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_8^4$ chia cho 16 có số dư tối đa bằng 8	0.25
	Còn $2009 = 125.16 + 9$ khi chia cho 16 có số dư là 9. Vậy không thể xảy ra $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_8^4 = 2009$, với $x_i \in \mathbb{Z}$.	0.25
4a	Chứng minh tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn (O).	1 điểm
		Không cho điểm hình vẽ bài 4

	Xét tứ giác HEAF ta có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{FHE} = 180^\circ$	0.25
	Ta có $\widehat{BHC} = \widehat{FHE}$ (đối đỉnh)	0.25
	Theo giả thiết M và H đối xứng nhau qua BC nên $\widehat{BMC} = \widehat{BHC}$	0.25
	Suy ra $\widehat{FAE} + \widehat{BMC} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác ABMC nội tiếp (O)	0.25
	Chứng minh EQ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔEHC.	1 điểm
4b	Gọi R trung điểm HC. Ta có $RE = RH = RC = \frac{HC}{2}$ (tính chất trung tuyến Δ vuông HEC) \Rightarrow R là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EHC	0.25
	$\widehat{REC} = \widehat{RCE}$ (ΔREC cân tại R); $QE = QA = QB = \frac{AB}{2}$ (tính chất trung tuyến Δ vuông AEB) $\Rightarrow \widehat{QAE} = \widehat{QEA}$ (ΔQAE cân tại Q)	0.25
	Mà $\widehat{QAE} + \widehat{RCE} = 90^\circ$ (ΔAFC vuông tại F) $\Rightarrow \widehat{QEA} + \widehat{REC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{QER} = 90^\circ$	0.25
	$\Rightarrow QE \perp ER$ tại E và $E \in (R)$. Nên EQ tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác EHC.	0.25
	Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}$.	1 điểm
4c	Trong (O) có $\widehat{NCA} = \widehat{NBA}$ (nội tiếp cùng chắn \widehat{AN}) và $\widehat{ACP} = \widehat{NBA}$ (cùng phụ \widehat{BAC}) $\Rightarrow \widehat{NCA} = \widehat{ACP}$	0.25
	ΔNCH có CE là đường cao vừa là đường phân giác $\Rightarrow \Delta NCH$ cân tại C $\Rightarrow AC$ là trung trực của đoạn HN $\Rightarrow EH = EN$. Tương tự ta chứng minh được $FH = FP$	0.25
	Do đó $T = \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF} = \frac{AD+DM}{AD} + \frac{BE+EN}{BE} + \frac{CF+FP}{CF}$ $= 3 + \frac{DM}{AD} + \frac{EN}{BE} + \frac{FP}{CF} = 3 + \frac{DH}{AD} + \frac{EH}{BE} + \frac{FH}{CF}$	0.25
	$= 3 + \frac{S(BCH) + S(ACH) + S(ABH)}{S(ABC)} = 3 + \frac{S(ABC)}{S(ABC)} = 4.$	0.25
	Chứng minh $S_{ABC} \leq 8\sqrt{3}$.	1 điểm
5	Gọi H là trung điểm BC. Do $BM = CM$ nên M thuộc trung trực đoạn BC $\Rightarrow MH \perp BC$	0.25
	Lấy A_1 trên tia đối của MH sao cho $MA_1 = 1$. Ta có $h_a \leq AM + MH = A_1M + MH = A_1H$	0.25
	Đặt $MH = x$ ($x > 0$), ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h_a \leq \frac{1}{2} BC \cdot A_1H = BH \cdot A_1H \leq S_{A_1BC}$	0.25
	$BH = \sqrt{BM^2 - MH^2} = \sqrt{21 - x^2}$ $A_1H = x + 1$ $BH \cdot A_1H = (x + 1)\sqrt{21 - x^2}$ $\Rightarrow (S_{A_1BC})^2 = (x + 1)^2(21 - x^2)$	0.25
	Ta chứng minh $(S_{A_1BC})^2 \leq 192 \Leftrightarrow -x^4 - 2x^3 + 20x^2 + 42x + 21 \leq 192$ $\Leftrightarrow (x - 3)^2(x^2 + 8x + 19) \geq 0$: luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi $MH = 3$.	0.25

----- HẾT -----